Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (12 questions) **Page 3**

2. Production de tubes fluorescents et de rivets : probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsms.fr/assets/annales/bts-ms/E2 - Mathématiques/2022/BTS MS - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse f(t) est étudiée à partir de t = 0. Les questions portent sur une équation différentielle, les variations et l'intégrale de f, puis son développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.**

La formule fournie pour $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$. Avec $a = 0{,}8$, on obtient l'ensemble des solutions en faisant varier la constante réelle k.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$, on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$, égal au second membre de (E). Ainsi, g est bien une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant une solution particulière, ici $g(t) = 5$, aux solutions de l'équation homogène associée. Ces dernières sont de la forme $ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$. La condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. Donc $k = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand $t \to +\infty$, $-0{,}8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers 0 et la fonction tend vers son terme constant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C représentative de f admet une asymptote, et donner une équation de cette asymptote.

Une fonction qui tend vers une limite finie L en $+\infty$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite vaut 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En admettant que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ pour tout t de [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) < 0$ et f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t) \to 5$ lorsque $t \to +\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste ainsi positive et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans jamais s'annuler.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

En dérivant $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5 = 15e^{-0{,}8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$, donc F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance d parcourue entre t_0 et t_1 est donnée par d = ∫ de t_0 à t_1 f(t)dt. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t_0 = 0 et t_1 = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant par l'expression de la primitive : $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$ mètres. L'arrondi au centimètre donne deux décimales.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8} \approx 15{,}33 \text{ m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier l'unique expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le développement limité d'ordre 2 conserve les termes jusqu'au degré 2 et s'écrit avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Parmi les propositions du sujet, la troisième est la seule qui convient.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente a donc pour ordonnée à l'origine 20 et pour pente -12.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Production de tubes fluorescents et de rivets : probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance

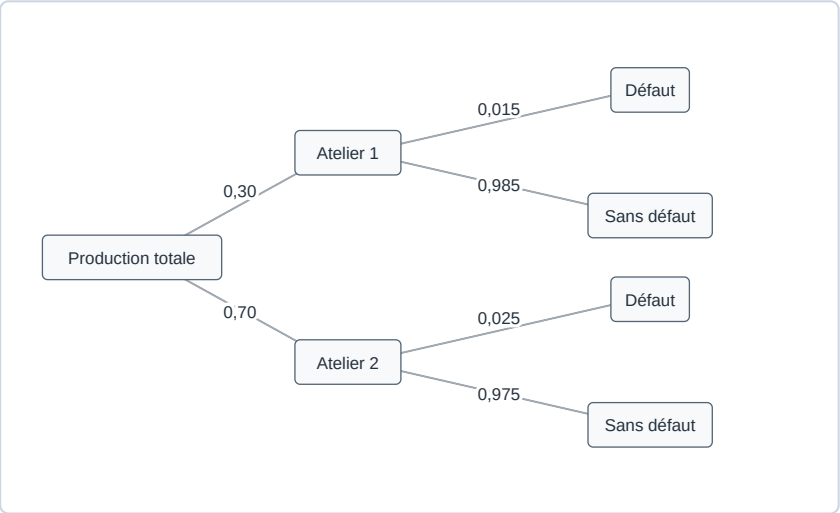
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des parts de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie les probabilités liées aux ateliers, la durée de vie exponentielle des tubes, puis l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation des deux ateliers et la présence ou l'absence d'un défaut.

La première bifurcation donne la proportion produite par chaque atelier. À partir de chaque atelier, la seconde bifurcation indique le taux de défaut puis son complément, le taux d'absence de défaut. Les probabilités de chaque paire de branches issues d'un même nœud totalisent 1.

Atelier d'origine et présence d'un défaut



A1 : atelier 1 ; A2 : atelier 2 ; D : présence d'un défaut.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Arbre pondéré : voir le schéma.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 1 présentant un défaut est le produit de la probabilité de choisir cet atelier et du taux de défaut de cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit $0{,}45\%$.

Question 3. **Montrer l'égalité indiquée pour P(D). La valeur imprimée est 0,0195, mais elle est barrée sur l'image et une annotation manuscrite indique 0,022.**

Les événements A_1 et A_2 forment une partition de la production. La formule des probabilités totales donne donc $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$. En remplaçant par les données : $0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$. Cette valeur concorde avec l'annotation manuscrite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit $2{,}2\%$.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche $P(A_2 \mid \overline{D})$. La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut est $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité totale d'absence de défaut est $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est $0{,}698$, soit environ $69{,}8\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer l'espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est donnée par $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Le sujet indique $\lambda = 0{,}001$, donc $E(T) = \frac{1}{0{,}001} = 1\,000$ heures. Cette valeur représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube fluorescent.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule du sujet est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $t = 8\,000$ et $\lambda = 0{,}001$, on obtient $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8}$. Comme la loi exponentielle est continue, remplacer $<$ par $\leq$ ne change pas la probabilité. L'arrondi demandé est au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

L'événement $T > 10\,000$ est le complémentaire de $T \leq 10\,000$. Par la formule de la loi exponentielle, $P(T > 10\,000) = e^{-\lambda \times 10\,000} = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10}$. On arrondit cette probabilité au centième, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence des rivets conformes dans l'échantillon. Avec 975 rivets conformes sur 1 000, on obtient $f = \frac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence sert d'estimation de la proportion dans l'ensemble de la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $f = 0{,}975$, soit $97{,}5\%$.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % centré sur la fréquence observée pour la proportion p. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La formule fournie donne l'intervalle $[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}]$. Avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$, la marge vaut environ $0{,}009677$. Les bornes sont donc environ $0{,}965323$ et $0{,}984677$, puis arrondies au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux où il est 3. Les deux exercices de dix points étudient le freinage d'un chariot et le contrôle de production, en évaluant équations différentielles, analyse de fonction, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière aide à résoudre l'équation avec second membre.
- Si f(t) tend vers une limite finie L quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-lambdat}$ et E(T) = 1/λ.
- La fréquence observée est f = x/n ; la formule fournie pour l'intervalle de confiance à 95 % est f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Conserver les unités cohérentes : vitesse en $m \cdot s^{-1}$, temps en secondes et distance en mètres.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier l'événement conditionnant et écrire le quotient adapté.
- Distinguer la probabilité d'une durée inférieure ou égale à t de celle d'une durée supérieure à t.
- Respecter les arrondis demandés et signaler la discordance entre la valeur imprimée de P(D) et les données de l'énoncé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du chariot ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière constante de l'équation avec second membre. Enfin, utilisez la condition initiale f(0) = 20 pour déterminer la constante et exprimer la vitesse.

Q : Comment choisir la formule pour calculer une probabilité de durée de vie ?

Pour une durée inférieure ou égale à t, utilisez $P(T \leq t) = 1 - e^{-lambdat}$. Pour une durée supérieure à t, utilisez la probabilité complémentaire $e^{-lambdat}$, avec t exprimé en heures.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de dix points. Répartissez le temps entre eux, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Quels éléments sont importants pour répondre aux attentes du jury ?

Présentez les formules et les étapes de calcul, puis rédigez une conclusion liée au contexte. Respectez les arrondis demandés. Pour le QCM sur le développement limité, recopiez une seule réponse, sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsms.fr/assets/annales/bts-ms/E2 - Mathématiques/2022/BTS MS - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Maintenance des Systèmes : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.