Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsms.fr/assets/annales/bts-ms/E2 - Mathématiques/2022/BTS MS - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine roule à 20 m/s lorsque son système de freinage se met en action, et sa vitesse f(t) est modélisée par une équation différentielle. L'exercice étudie cette vitesse, la distance parcourue pendant la première seconde et le développement limité de f au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

La formule fournie donne les solutions de $y' + ay = 0$ sous la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$.
2. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant à la solution particulière $g(t) = 5$ les solutions de l'équation homogène. Ces dernières sont de la forme $ke^{-0,8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. La condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$, donc $k = 15$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Comme $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$ et donc $e^{-0,8t} \to 0$. Le terme exponentiel tend vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe représentative C admet une asymptote et en donner une équation.

Une limite finie L en $+\infty$ donne une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite vaut 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, le terme $15e^{-0,8t}$ est strictement positif. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse ne s'annule jamais, même si elle tend vers $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

1. On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$.
2. On obtient $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant par l'expression de F, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. À l'arrondi au centimètre, cela donne $15,33$ mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, choisir l'expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. La proposition correcte est donc celle qui contient ce reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente en $t = 0$ a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. D'après les données, $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. On obtient donc la droite passant par $(0; 20)$ de pente -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = -12t + 20.$

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie

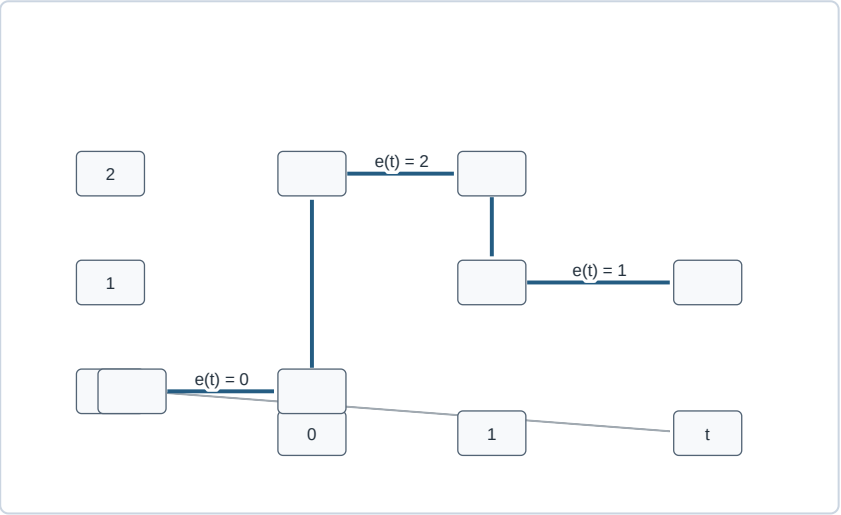
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande de déterminer et représenter les signaux d'entrée et de sortie à l'aide des transformées de Laplace et de leurs propriétés de décalage.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La causalité impose e(t) = 0 pour t < 0. Pour t ≥ 0, U(t) vaut 1, donc le signal vaut 2 avant l'instant 1. À t = 1, U(t − 1) devient égal à 1 et le signal passe à 1. Le tracé ci-dessous montre ces trois niveaux et les deux instants de saut, avec la convention de l'énoncé aux instants 0 et 1.

Signal d'entrée e(t)



Sauts en t = 0 et t = 1 ; les valeurs aux instants de saut suivent la définition de U.

✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t) vaut 0 pour t < 0, 2 pour 0 ≤ t < 1, puis 1 pour t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et, pour le retard d'une unité, $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$. Par linéarité de la transformée de Laplace, on applique les coefficients de l'expression d'entrée : $E(p) = 2\mathcal{L}(U(t)) - \mathcal{L}(U(t-1))$. On rassemble ensuite les deux termes sur le même dénominateur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La transformée du signal d'entrée est $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la question précédente, on obtient $S(p) = \dfrac{1}{p+1} \times \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$. La mise au même dénominateur puis la séparation des deux termes donnent bien l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$, conformément à l'égalité à démontrer.

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On réduit le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$. On retrouve donc le membre de gauche. L'égalité est vérifiée pour les valeurs de p où les expressions sont définies, soit $p \neq 0$ et $p \neq -1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$, pour $p \neq 0$ et $p \neq -1$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), (1/p)e^(-p) et (1/(p + 1))e^(-p).

Le formulaire associe $1/p$ à l'échelon unité et $1/(p+1)$ à $e^{-t}U(t)$. Pour les deux autres expressions, le facteur e^{-p} traduit un retard d'une unité : on remplace donc t par $t-1$ et on multiplie par $U(t-1)$. Les réponses ci-dessous sont données dans l'ordre demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

D'après la décomposition de la question 2, $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$. Son inverse est donc $U(t) - e^{-t}U(t)$. Le second terme de $S(p)$ est retardé d'une unité et ne contribue pas sur $[0;1[$. Sur cet intervalle, $U(t) = 1$, d'où l'expression de la sortie.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;1[$, le signal de sortie est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

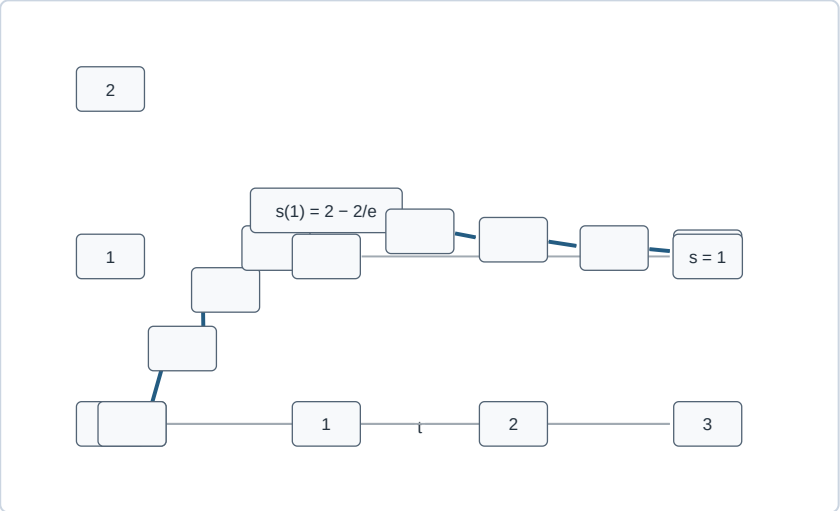
À l'instant $t = 1$, on utilise la formule donnée pour $[1; +\infty[$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, cette valeur se simplifie en $2 - 2/e$. Son évaluation est environ $1,2642$, donc l'arrondi au dixième est $1,3$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Valeur exacte : $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e}$. Au dixième : $s(1) \approx 1,3$.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Pour $0 \leq t < 1$, on trace $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, croissante de 0 à $2 - 2/e$. À partir de $t = 1$, la formule fournie donne $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$, une fonction décroissante qui tend vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$; la courbe est donc continue à ce point. Le schéma repère aussi son asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)



Courbe schématique, avec l'asymptote horizontale s = 1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe part de $(0; 0)$, atteint $(1; 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, l'expression admise est $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel e^{-t} tend vers zéro. Le coefficient $e - 2$ étant constant, leur produit tend également vers zéro. La limite de la somme est alors le terme constant 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite du signal de sortie lorsque $t \to +\infty$ est 1.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices portent sur le freinage d'un chariot et un système électrique, et évaluent équations différentielles, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière constante vaut b/a lorsque a est non nul.
- Si f(t) tend vers L en +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle de temps.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
- Justifier le sens de variation par le signe de la dérivée et indiquer la limite dans le tableau.
- Évaluer la primitive aux deux bornes et respecter l'arrondi demandé au centimètre.
- Appliquer correctement le décalage temporel et représenter les changements de signal aux instants 0 et 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment reconnaître l'asymptote horizontale de la vitesse du chariot ?

On calcule la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞. Si cette limite vaut L, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L. Ici, le terme exponentiel tend vers zéro et la limite vaut 5.

Q : Comment obtenir l'expression temporelle du signal de sortie avec Laplace ?

On calcule d'abord S(p) = H(p)E(p), puis on décompose les fractions en éléments simples. On utilise les transformées inverses usuelles et la propriété de décalage temporel pour les termes contenant e^(-p).

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points chacun et autorise la calculatrice. Répartissez le temps entre les deux exercices, en gardant une marge pour les tracés à reporter sur le document-réponse et pour vérifier les résultats.

Q : Quels éléments présenter pour rendre les réponses faciles à évaluer ?

Présentez les étapes utiles, les unités et une conclusion liée au contexte. Pour les tracés, respectez les axes et les changements de signal ; pour les calculs numériques, donnez la valeur exacte puis l'arrondi demandé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsms.fr/assets/annales/bts-ms/E2 - Mathématiques/2022/BTS MS - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Maintenance des Systèmes : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.